ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ, 23/1/2017, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (2,5 μον.)
(A) Δίνονται δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε να ισχύει $0 \le a_n \le \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(B) Να εξεταστεί αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $a_k = \left(\frac{5k^2+6}{4k^2+7k}\right)^k$ (ii) $a_k = (-1)^k \frac{23}{31k+2}$ (iii) $a_k = \frac{5^k \cdot k!}{k^k}$ (iv) $a_k = \frac{1}{k \cdot \log k}$.

Θέμα 2. (2,5 μον.)
(A) Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία Cauchy (βασική ακολουθία) στο A, να δειχθεί ότι η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης ακολουθία Cauchy .

(B) Να εξετάσετε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$,
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x \cdot \sin x$,
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Θέμα 3. (1 μον.)
Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-2x}\sin(3x)$. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Taylor της f τάξης 3 γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

Θέμα 4. (1,5 μον.)
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της ρητής συνάρτησης

$$\int_2^4 \frac{3x^2-5x-4}{x^3-x^2-x+1}\,dx$$

φέρνοντας το αποτέλεσμα στην μορφή $k + \log(\lambda)$ για κατάλληλους ρητούς αριθμούς k, λ.

Θέμα 5. (1.5 μον.)
Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Να υπολογίσετε το κάτω άθροισμα $L(f, P_n)$ και το άνω άθροισμα $U(f, P_n)$ για καθεμιά από τις διαμερίσεις $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Με χρήση αποκλειστικά των παραπάνω υπολογισμών να δείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και να βρείτε το $\int_0^1 f(x)dx$.

Θέμα 6. (2 μον.)
Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx, \quad \int_0^1 \log x\,dx, \quad \int_1^{e^2} (\log x)^2 dx, \quad \int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx.$$

Καλή Επιτυχία!